Lineare Gleichungen lösen

(1) Eine Gleichung mit 2 oder 3 Unbekannten

(2) Zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten

(3) 4 Unbekannte in 1/2/3 Gleichungen

24 Musterbeispiele, 38 Aufgaben mit Musterlösungen

Datei Nr. 61 011

Stand 3. Juli 2022

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Vorwort

Zu Beginn wird als Grundlage für das Lösen der Gleichungen das Rechnen mit Vektoren (Zahlenpaaren oder Tripeln) behandelt. Dazu gehören auch Linearkombinationen.

In diesem Text geht es um Gleichungen bzw. Gleichungssysteme mit mehr Unbekannten als Gleichungen. Zur Lösung wird das **Eliminationsverfahren** verwendet.

Die **Lösung mit dem Gauß-Algorithmus** wird im Text 62011 gezeigt.

Gleichungssysteme mit **gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten** werden im Text 61013 behandelt. Dort werden dann Determinanten verwendet oder im Text 62011 mit dem Gauß-Algorithmus.

Inhalt

1 Vorkenntnisse:

1.1 Linearkombinationen von Paaren und Tripeln 4

1.2 Gleichungen mit 1 Unbekannten B1 $2x+5=11$ 5

2 1 Gleichung mit 2 Unbekannten 6

B2 $3x+2y=10$ B3 $2x+y=5$ B4 $x-5y=5$

B5 $4x+5y=20$ B6 $4x_1-x_2=3$ B7 $3x_1+2x_2=6$

Trainingsaufgabe 1 11

3 3 Unbekannte in <u>einer</u> Gleichung 12

B8 $2x-3y+z=8$ B9 $4x_1+2x_2-5x_3=18$

B10 $2x+y-5z=12$ B11 $2x+3y+4z=12$

B12 $3x_1-5x_2-6x_3=12$ B13 $2x-y+2z=0$

Trainingsaufgabe 2 16

4 3 Unbekannte in <u>zwei</u> Gleichungen 17

B14 $\begin{array}{l} x+2y-z=4 \quad (1) \\ 2x+3y+2z=3 \quad (2) \end{array}$ B15 $\begin{array}{l} 4x-2y+5z=3 \\ 2x+6y-z=12 \end{array}$

B16 $\begin{array}{l} x-y+4z=0 \\ 2x+y-4z=0 \end{array}$ B17 $\begin{array}{l} 5x+y-2z=14 \\ x+y+2z=0 \end{array}$ B18 $\begin{array}{l} 2x+y+2z=8 \\ x+3z=5 \end{array}$

Trainingsaufgabe 3 22

5 4 Unbekannte in ein / zwei / drei Gleichungen 23

B19 $x_1-2x_2+4x_3+3x_4=12$ B20 $4x_1+2x_2-5x_4=10$

B21 $\begin{array}{l} x_1+2x_2-2x_3+4x_4=4 \\ 2x_1-x_2+4x_3+3x_4=8 \end{array}$ B22 $\begin{array}{l} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+5x_2+x_4=0 \end{array}$

B23 $\begin{array}{l} x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \end{array}$ B24 $\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_4=4 \\ x_1+x_3+x_4=2 \\ x_2+x_3+2x_4=-5 \end{array}$

Trainingsaufgaben 4 / 5 / 6 ab 24

6 Lösung von Gleichungen mit CAS-Rechner 29

6.1 CASIO ClassPad 29

6.2 Texas Instruments TI Nspire 32

Lösungen der Aufgaben 35 bis 47

1 Vorkenntnisse

1.1 Linearkombinationen von Paaren und Tripeln

Das Lösen von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen lernt man bereits in den Klassenstufen 6 bis 9. In vorliegendem Text wird dies auf höherem Niveau der Oberstufe behandelt.
Wenn eine Gleichung 2 oder mehr Unbekannte hat, oder ein Gleichungssystem mehr Unbekannte als Gleichungen, dann gibt es meistens unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge hat dann sogar eine Struktur. Anders gesagt: Man kann eine Formel angeben, nach der sich diese unendlich vielen Lösungen berechnen lassen.

Um dies mathematisch gut darstellen zu können benötigt man allerdings Vektoren. Das sind Paare, Tripel usw. die man nach bestimmten Regeln addieren kann, und zu denen es auch Vielfache gibt.

Das Rechnen mit Lösungsvektoren wird in diesem Text nicht von Grunde auf gezeigt.
Das geschieht auf Schulniveau im Text 61001 auf den etwa ersten 20 Seiten.

Was man dabei sehr oft benötigt, ist das Zerlegen eines Paares oder Tripels in eine
Linearkombination.

Beispiele

(1) Aus diesen zwei Spaltenvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann man diese Vielfachen bilden

$r\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5r \\ r \end{pmatrix}$ und $s\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5s \\ 2s \end{pmatrix}$. Wenn man Vielfache addiert, bildet man eine so genannte

Linearkombination: $\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = r\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r - 5s \\ r + 2s \end{pmatrix}$.

Diese Berechnung kann man umkehren und die Linearkombination zerlegen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2r - 5s \\ r + 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5s \\ 2s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) Nun eine solche Zerlegung mit Tripeln:

$$\begin{pmatrix} 2 + 3r - s \\ 2r + 5s \\ -1 + r + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3r \\ 2r \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s \\ 5s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) Oder: $\begin{pmatrix} 4 \\ r \\ 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Anfänger sollten zuerst so zerlegen, dass die Parameter getrennt sind (also zuerst das Tripel ohne r und s, dann das Tripel mit dem Parameter r und dann das mit dem Parameter s.
Dann klammert man den Parameter aus dem Tripel mit r aus und analog bei s.

1.2 Gleichungen mit 1 Unbekannten

Einführungsbeispiel (1):

Zuerst das übliche Lösungsverfahren:

$\boxed{2x+5=11}$	| -5	(1)
$2x=11-5$	| addieren	(2)
$2x=6$	| :2	(3)
$x=3$	Endgleichung	(4)

Lösungsmenge: $\mathbb{L}=\{3\}$

Bei diesem Verfahren wird die gegebene Gleichung durch <u>Äquivalenzumformungen</u> in immer einfachere Gleichungen umgeformt (die alle dieselbe Lösungsmenge haben), bis eine so einfache Gleichung übrigbleibt, der man die Lösung direkt ansieht:

Erklärung: In Gleichung (1) subtrahiert man auf beiden Seiten 5
Gleichung (2) hat dann alle reinen zahlen rechts.
Diese kann man addieren, ergibt Gleichung (3)
Nun dividiert man durch den Faktor vor x, also durch 2.
Das ergibt die Endgleichung (4). Dort erkennt man, dass x gleich 4 ist.

Diese Gleichung kann man als Aufgabe so formulieren:

Welche Zahl muss man für x in den Term $2x+5$ einsetzen, damit man den Wert 11 erhält?

Abgesehen von Lösungsverfahren zur Berechnung der Lösungszahl, kann man auch durch Probieren versuchen herauszufinden, ob eine Zahl die gesuchte Lösung ist. Dazu setzt man sie in die Gleichung ein und überprüft, ob dadurch eine **wahre Aussage** entsteht. Man nennt dies „die Probe machen". Wenn ja, haben wir eine Lösungszahl verwendet. Entsteht eine **falsche Aussage**, dann eben nicht.

Merke: Eine Lösungszahl einer Gleichung erzeugt durch Einsetzen eine wahre Aussage.

Zu jeder Gleichung gehört eine **Grundmenge,** die angibt, welche Zahlen eingesetzt werden dürfen. In der Regel ist es (auf Oberstufenniveau) die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Einige Einsetzungen seien gezeigt:

$x=3$ ergibt	$2\cdot 3+5=11$	also die wahre Aussage	11 = 11.
x = 1 ergibt	$2\cdot 1+5=11$	also die falsche Aussage	7 = 11.

Da 3 die einzige Lösungszahl dieser Gleichung ist, schreibt man sie in die Lösungsmenge: $\mathbb{L}=\{3\}$

Information

Äquivalenzumformungen (welche die Lösungsmenge nicht verändern) sind Addition oder Subtraktion eines linearen Terms, Multiplikation oder Division mit einer Zahl ungleich 0.
Verboten ist die Multiplikation oder Division mit einen Term, der Null werden kann.

2 1 Gleichung mit 2 Unbekannten

Einführungsbeispiel (2): $3x + 2y = 10$ **Bitte lesen!**

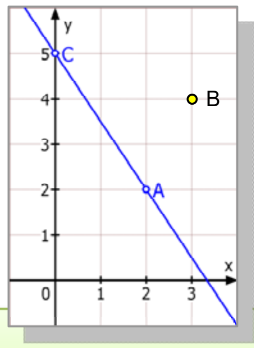
Diese Gleichung kann man als Aufgabe so formulieren: Für welche Zahlen ist die Summe aus dem Dreifachen der ersten und dem Zweifachen der zweiten Zahl genau 10?

Es ist sofort klar, dass eine Lösung aus zwei Zahlen bestehen muss, eine für x und die andere für y. Diese Zahlen darf man auch nicht vertauschen. Diese beiden Zahlen bilden somit ein geordnetes Zahlenpaar. Wir setzen einige beliebige Zahlenpaare ein und wollen so herausfinden, ob sie zur Lösungsmenge gehören:

$(2 \mid 2)$	ergibt	$6 + 4 = 10$	wahre Aussage.
$(3 \mid 4)$	ergibt	$9 + 8 = 10$:	falsche Aussage
$(0 \mid 5)$	ergibt	$0 + 10 = 10$	wahre Aussage.
$(-6 \mid 14)$	ergibt	$-18 + 28 = 10$	wahre Aussage.

Man kann unendlich viele Lösungspaare finden. Sie alle gehören in die Lösungsmenge:

$\mathbb{L} = \{(2 \mid 2); (-6 \mid 14); (0 \mid 5).; ... \}$



Eine Lösungsmenge einer Gleichung mit zwei Unbekannten lässt sich geometrisch als Gerade darstellen.

Dazu löst man die Gleichung nach y auf: $y = -\frac{3}{2}x + 5$.

Dies nennt man dann eine **Geradengleichung**,

MERKE:

Diese Gerade ist die geometrische Darstellung der Lösungsmenge der Gleichung.

Zwei Lösungspaare davon hatten wir oben ausgerechnet. Das dritte passt wegen seiner Koordinaten nicht mehr in das Schaubild. Das Paar $(3 \mid 4)$ wird durch den Punkt B dargestellt. B liegt nicht auf der Geraden, denn dieses Zahlenpaar gehört nicht zur Lösungsmenge der Gleichung.

Zu jeder Gleichung gehört eine Grundmenge, die uns sagt, aus welcher Menge die einzusetzenden Zahlen genommen werden dürfen. Da wir hier zum Einsetzen Zahlenpaare benötigen, ist die Grundmenge die **Menge aller reellen Zahlenpaare** $G = \mathbb{R}^2$.

Dies wird in der Regel vorausgesetzt und daher meistens nicht angegeben.

Die oben angegebene Lösungsmenge nützt nicht sehr viel, denn sie enthält gerade man drei Lösungspaare. Ich zeige jetzt, wie man für diese Lösungspaare eine Berechnungsformel bilden kann. Dann kann man schnell weitere Paare berechnen.

Es geht um die Gleichung $\boxed{3x+2y=10}$.

Diese kann man z.B. nach y umstellen: $y=-\frac{3}{2}x+5$

Dann kann man zu jedem x den passenden y-Wert für das Lösungspaar berechnen:

Zu $x=8$ erhält man $y=-\frac{3}{2}\cdot\boxed{8}+5 \underset{\text{kürzen}}{=} -3\cdot 4+5=-7 \Rightarrow \vec{x}_1=(8\,|\,-7)$ oder $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}8\\-7\end{pmatrix}$.

Man schreibt das Lösungspaar entweder als Zeile oder als Spalte auf, je nach Aufgabe. Das hat mit der Berechnung nichts zu tun. Wenn man Punkte berechnet, dann ist $(8\,|\,-7)$ die Koordinatendarstellung. Geht es um die Berechnung von Vektoren, verwendet man in der Regel die Spaltenschreibweise $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}8\\-7\end{pmatrix}$, z. B. in der Geometrie.

Noch eine Berechnung;

Zu x = -3 erhält man $y=-\frac{3}{2}\cdot\boxed{-3}+5 \underset{\text{kürzen}}{=} \frac{9}{2}+5=\frac{19}{2} \Rightarrow \vec{x}_1=\left(-3\,|\,\frac{19}{2}\right)$ oder $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}8\\-7\end{pmatrix}$.

Nun erstellen wir die erwähnte Berechnungsformel.
Dazu wählt man keine bestimmte reelle Zahl sondern eine beliebige und schreibt:

Wähle $x=r$ mit $r\in\mathbb{R}$. Dann folgt: $y=-\frac{3}{2}\cdot\boxed{r}+5 \Rightarrow \vec{x}_1=\left(r\,|\,-\frac{3}{2}r+5\right)$ bzw. $\vec{x}=\begin{pmatrix}r\\-\frac{3}{2}r+5\end{pmatrix}$

Der Leser kann einwenden, dass das doch im Grunde dasselbe ist wie wenn man gleich für x eine Zahl nimmt. Das ist richtig. Aber in der Vektorform kann man das Lösungspaar zerlegen:

$\vec{x}=\begin{pmatrix}r\\-\frac{3}{2}r+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r\\-\frac{3}{2}r\end{pmatrix}$ oder besser noch: $\boxed{\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}}$

Das ist in Vektorschreibweise das allgemeine Lösungspaar.

Nun folgt für Anfänger etwas Verblüffendes: Man kann dieses Lösungspaar deutlich vereinfachen, indem man die Wahl von x günstiger gestaltet,

Man erkennt doch in der nach y umgestellten Gleichung am Bruch $\frac{3}{2}$, dass man durch 2 dividieren muss. Also wählt man für x nicht r sondern 2r. Was bringt das???

Wähle $x=2r$ mit $r\in\mathbb{R}$. Dann folgt: $y=-\frac{3}{2}\cdot\boxed{2r}+5 \Rightarrow \vec{x}_1=(2r\,|\,-3r+5)$ bzw. $\vec{x}=\begin{pmatrix}2r\\-3r+5\end{pmatrix}$

Zerlegt man diesen Vektor noch, erhält man: $\boxed{\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}}$

Damit kann man die Lösungsmenge in dieser Form schreiben:

$$\boxed{\mathbb{L}=\left\{\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\,\middle|\,r\in\mathbb{R}\right\}}$$

Nun stellt sich die berechtigte Frage, warum man einmal x = r wählen kann, und dann aber auch x = 2r usw.
Das ist ganz einfach zu erklären:

Nehmen wir an, ich möchte $x = 8$ verwenden.

Im Falle $x = r$ ist r = 8 und man erhält dieses Lösungspaar: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \boxed{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

Im Falle x = 2r ist r = 4 und man erhält dieses Lösungspaar: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Man erkennt, dass man dasselbe Lösungspaar erhält.
Der Vorteil ist eben, dass die Lösungsformel einfacher wird.

(Noch ein Ausblick: Wir wissen, dass die Gleichung eine Gerade darstellt. Also haben wir durch diese Umrechnung in $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ eine vektorielle Geradengleichung erstellt.
Darauf gehe ich jetzt aber nicht weiter ein.

Beispiel 3 $\boxed{2x + y = 5}$ Ich stelle die Gleichung um: $y = 5 - 2x$ und berechne Lösungen:

z. B.:	Wähle x = 4:	folgt	$y = 5 - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3$,	$(4 \mid -3) \in \mathbb{L}$
	Wähle x = 1:	folgt	y = 5 – 2 = 3,	$(1 \mid 3) \in \mathbb{L}$
	Wähle x = -7	folgt	y = 5 +14 = 19,	$(-7 \mid 19) \in \mathbb{L}$

Bisher wissen wir also $\mathbb{L} = \{(4 \mid -3); (1 \mid 3); (-7 \mid 19); \ldots\}$

Vektorielle Berechnung des allgemeinen Lösungspaar:

Wähle $x = r \in \mathbb{R}$: folgt $y = 5 - 2 \cdot r$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ 5 - 2r \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$

Nun folgen vier Gleichungen, deren Musterlösung ich so aufschreibe, wie man sie im Heft darstellen kann (sollte).

Beispiel 4

$\boxed{x - 5y = 5}$

Hier ist es günstiger, die Gleichung nach x umzustellen, um Brüche zu vermeiden:

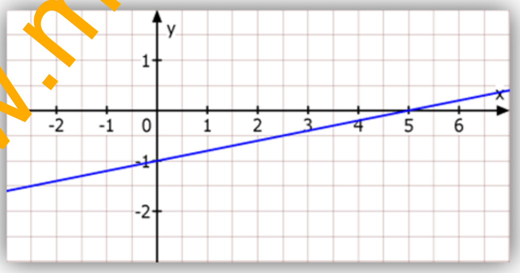
Umstellen nach x:	$x = 5 + 5y$
Wähle	$y = r,\ r \in \mathbb{R}$
folgt:	$x = 5 + 5r$
Allgemeiner Lösungsvektor:	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5+5r \\ r \end{pmatrix}$
Lösungsmenge:	$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5+5r \\ r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$
Oder zerlegt:	$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$

<u>Grafische Darstellung:</u>

Um das Schaubild der Lösungsmenge zu zeichnen, muss man natürlich die Gleichung nach y umstellen: $5y = x - 5 \quad | :5$

$y = \frac{1}{5}x - 1$

Die Gerade hat die Steigung $m = \frac{1}{5}$ und den y-Achsenabschnitt n = -1.



Beispiel 5

$\boxed{4x + 5y = 20}$

Auflösen z. B. nach y: $5y = 20 - 4x \quad \Rightarrow \quad y = 4 - \frac{4}{5}x$

Ungünstig ist: Wähle $x = r\,;\, r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = 4 - \frac{4}{5}r$:

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 4 - \frac{4}{5}r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{5}r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$. (1)

Es gibt eine Möglichkeit, zumindest die **<u>Brüche zu vermeiden</u>**, die in dem zu r gehörenden Vektor stehen. Wenn man eine freie Wahl hat, kann man diese auch so nutzen, dass man für x statt r eine „Zahl“ wählt, die bei y den Bruch wegfallen lässt. Dazu muss der Faktor 5 ins Spiel kommen. Wählt man $x = 5r$, wird der Lösungsvektor bruchfrei, wie man sieht:

Wähle $x = \boxed{5r}\,;\, r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = 4 - \frac{4}{5} \cdot \boxed{5r} = 4 - 4r$.

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5r \\ 4 - 4r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$. (2)

Die Lösungsmenge ist in beiden Verfahren dieselbe.
Sie wird jetzt lediglich durch eine einfachere Bildungsvorschrift angegeben.

Beispiel 6

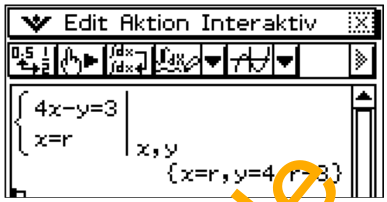
$\boxed{4x_1 - x_2 = 3}$ mit $G = \mathbb{R}^2$.

Umstellen nach x_2: $x_2 = 4x_1 - 3$

Wähle $x_1 = r;\quad r \in \mathbb{R}$

ergibt: $x_2 = 4r - 3$

CAS-Lösung:



Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = (r \mid 4r-3)$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 4r-3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$

Beispiel 7

$\boxed{3x_1 + 2x_2 = 6}$

Hier werden zwei Möglichkeiten zur Bestimmung der Lösungsmenge gezeigt.

(1) **Umstellen nach x_1:** $\boxed{x_1 = 2 - \frac{2}{3}x_2}$

Wählt man $x_2 = r;\quad r \in \mathbb{R}$

erhält man durch Einsetzen: $x_1 = 2 - \frac{2}{3}r$

Der allgemeine Lösungsvektor enthält jetzt einen Bruch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{3}r \\ r \end{pmatrix}$$

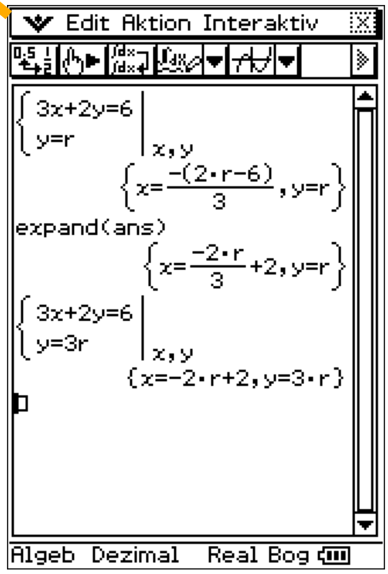
Wählt man aber $x_2 = \boxed{3r};\quad r \in \mathbb{R}$

dann folgt: $x_1 = 2 - \frac{2}{3} \cdot \boxed{3r} = 2 - 2r$

und der Term für den Lösungsvektor wird bruchfrei:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2-2r \\ 3r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$



---

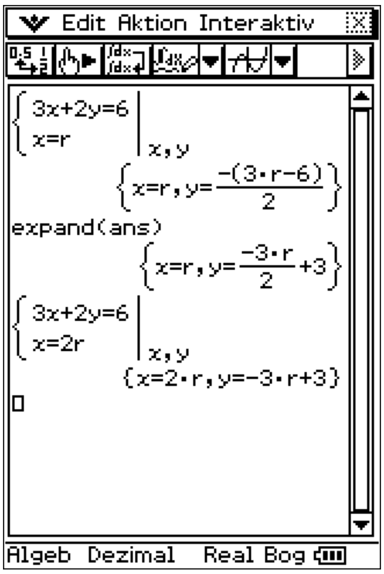
(2) **Umstellen nach x_2** $\boxed{x_2 = 3 - \frac{3}{2}x_1}$

Wähle günstig: $x_1 = \boxed{2r};\quad r \in \mathbb{R}$

ergibt bruchfrei: $x_2 = 3 - \frac{3}{2} \cdot \boxed{2r} = 3 - 3r$

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2r \\ 3-3r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$



Trainingsaufgabe 1

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

Die Grundmenge sei stets $G = \mathbb{R}^2$:

a) $4x + y = 8$

b) $x + 3y = 12$

c) $5x + 2y = 8$

d) $7x - 5y = 21$

e) $2x_1 + 5x_2 = 13$

f) $-8x_1 + 9x_2 = 1$

g) $3x_1 + 2x_2 = 0$

h) $4x_1 + 0x_2 = 5$

3 Drei Unbekannte in einer Gleichung

Die allgemeine Form ist $\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4}$ oder $\boxed{ax + by + cz = d}$

Einführungsbeispiel (8): $\boxed{2x - 3y + z = 8}$

Durch Einsetzen kann man überprüfen, ob ein Zahlentripel Lösung der Gleichung ist. Beispiel:

$(4|1|3)$ führt zur wahren Aussage $2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 + 3 = 8$, also ist $(4|1|3) \in \mathbb{L}$.

$(5|-2|-8)$ führt zur wahren Aussage $10 + 6 - 8 = 8$, also ist $(5|-2|-8) \in \mathbb{L}$.

$(1|1|2)$ führt zur falschen Aussage $2 - 3 + 2 = 8$, also ist $(1|1|2) \notin \mathbb{L}$. Usw.

Berechnung einzelner Lösungstripel dieser Gleichung

Die Gleichung enthält drei Variable. Gibt man zwei davon beliebig vor, kann man die dritte berechnen. Zuerst stellt man nach der zu berechnenden Unbekannten um:

Beispiele: $2x - 3y + z = 8$ folgt: $\boxed{z = 8 - 2x + 3y}$

Wähle $x = 7$ und $y = 1$, dann folgt $z = 8 - 14 + 3 = -3$ und $(7|1|-3) \in \mathbb{L}$

Wähle $x = 1$ und $y = 0$, dann folgt $z = 8 - 2 + 0 = 6$ und $(1|0|6) \in \mathbb{L}$ usw.

Vektorielle Methode zur Erfassung der gesamten Lösungsmenge:

Man geht genauso vor, wie soeben gezeigt, nur dass die frei gewählten Zahlen beliebig sein sollten. Man nimmt dafür sogenannte Parameter wie r, s oder t.

1. Möglichkeit: Aus $2x - 3y + z = 8$ folgt: $\boxed{z = 8 - 2x + 3y}$

Wähle $x = r \in \mathbb{R}$ und $y = s \in \mathbb{R}$, folgt: $z = 8 - 2r + 3s$.

So entsteht das Lösungstripel
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 8 - 2r + 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Menge aller Lösungstripel ist die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Möglichkeit: Aus $2x - 3y + z = 8$ folgt: $\boxed{y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z - \frac{8}{3}}$

Wähle $x = r \in \mathbb{R}$ und $z = s \in \mathbb{R}$, folgt: $y = \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}s - \frac{8}{3}$

Man erkennt, dass Brüche entstehen, also ist dieser Lösungsweg ungünstig.

So entsteht das Lösungstripel
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}s - \frac{8}{3} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

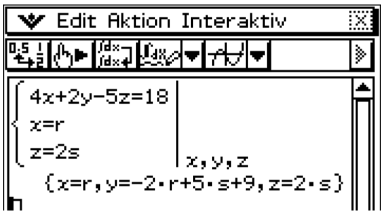
3. Möglichkeit: Aus $2x - 3y + z = 8$ folgt $2x = 8 + 3y - z \Rightarrow x = 4 + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z$

Wähle $y = r \in \mathbb{R}$ und $z = s \in \mathbb{R}$, folgt: $x = 4 + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}s$

auch dieser Weg führt zu Brüchen …

Beispiel 9

$4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 18$



Umstellen z. B. nach x_2: $x_2 = 9 - 2x_1 + \frac{5}{2}x_3$

Hier kann man Brüche vermeiden, indem man die für x_3 gewählte Zahl in der Form 2s darstellt. Das sieht dann so aus:

Wähle $x_1 = r \quad x_1 = r \in \mathbb{R}$

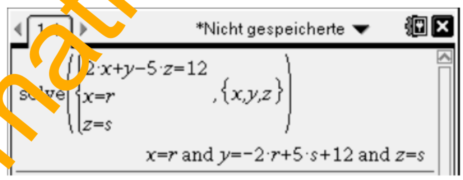
und $x_3 = 2s, \quad s \in \mathbb{R}$

dann folgt: $x_2 = 9 - 2r + \frac{5}{2} \cdot 2s = 9 - 2r + 5s$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 9-2r+5s \\ 2s \end{pmatrix} \middle| \; r,s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \; r,s \in \mathbb{R} \right\}$

Beispiel 10

$2x + y - 5z = 12$



Hier ist es günstig, die Gleichung nach y aufzulösen:

Denn so entsteht kein Bruch: $y = 12 - 2x + 5z$

Jetzt wählen wir für x eine beliebige reelle Zahl r und für z ein beliebiges s:

Wähle $x = r \in \mathbb{R}$

und $z = s \in \mathbb{R}$

ergibt: $y = 12 - 2r + 5s$.

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ 12-2r+5s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

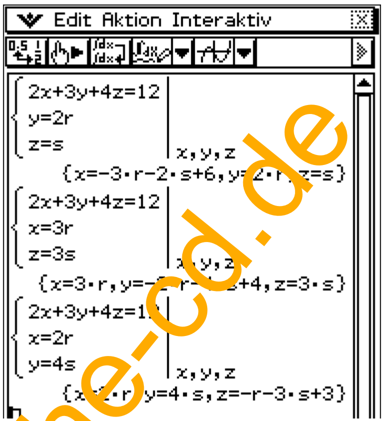
Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \; \middle| \; r,s \in \mathbb{R} \right\}$

Bemerkung:

Wir sehen, dass sich die freie Wahl von 2 Variablen so auswirkt, dass der Lösungsvektor diese zwei Variablen als Parameter enthält. Er besteht jetzt aus einem absoluten Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ plus einer beliebigen Linearkombination der Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 11 $\boxed{2x + 3y + 4z = 12}$ **WICHTIGES Beispiel!**

Ich zeige nun die Schreibweise, wenn man die Vektoren als Zeilen schreibt. Der Weg ist gleich!



Ich zeige drei verschiedene Lösungswege. Dies ist wichtig, damit man einmal sieht, welche Konsequenz es hat, wenn man jedes Mal eine andere freie Wahl durchführt:

1. **Auflösen nach x:** $x = 6 - \frac{3}{2}y - 2z$

Wähle $y = 2r,\ r \in \mathbb{R}$

und $z = s \in \mathbb{R}$,

ergibt: $x = 6 - 3r - 2s$

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = \left(6 - 3r - 2s \,|\, 2r \,|\, s\right)$

$\vec{x} = \left(6|0|0\right) + \left(-3r|2r|0r\right) + \left(-2s|0s|s\right)$

Lösungsmenge: $\boxed{\mathbb{L} = \left\{\left(6|0|0\right) + r\left(-3|2|0\right) + s\left(-2|0|1\right) \ |\ r,s \in \mathbb{R}\right\}}$.

2. **Auflösen nach y:** $y = 4 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}z$

Wähle $x = 3r,\ r \in \mathbb{R}$ und $z = 3s,\ s \in \mathbb{R}$,

ergibt: $y = 4 - 2r - 4s$

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = \left(3r \,|\, 4 - 2r - 4s \,|\, 3s\right)$

$\vec{x} = \left(0|4|0\right) + r\left(3|-2|0\right) + s\left(0|-4|3\right)$

Lösungsmenge: $\boxed{\mathbb{L} = \left\{\left(0|4|0\right) + r\left(3|-2|0\right) + s\left(0|-4|3\right) \ |\ r,s \in \mathbb{R}\right\}}$

3. **Auflösen nach z:** $z = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y$

Wähle $x = 2r,\ r \in \mathbb{R}$ und $y = 4s,\ s \in \mathbb{R}$

ergibt: $z = 3 - r - 3s$

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = \left(2r \,|\, 4s \,|\, 3 - r - 3s\right)$

$\vec{x} = \left(0|0|3\right) + \left(2r|0r|-r\right) + \left(0s|4s|-3s\right)$

Lösungsmenge: $\boxed{\mathbb{L} = \left\{\left(0|0|3\right) + r\left(2|0|-1\right) + s\left(0|4|-3\right) \ |\ r,s \in \mathbb{R}\right\}}$

Die Lösungsmengen im Überblick:

$\mathbb{L} = \left\{\left(6|0|0\right) + r\left(-3|2|0\right) + s\left(-2|0|1\right) \ |\ r,s \in \mathbb{R}\right\}$

$\mathbb{L} = \left\{\left(0|4|0\right) + r\left(3|-2|0\right) + s\left(0|-4|3\right) \ |\ r,s \in \mathbb{R}\right\}$

$\mathbb{L} = \left\{\left(0|0|3\right) + r\left(2|0|-1\right) + s\left(0|4|-3\right) \ |\ r,s \in \mathbb{R}\right\}$

Es gibt also verschiedene Darstellungsformen derselben Lösungsmenge gibt.
Wie diese zusammenhängen, kann erst später geklärt werden.

Beispiel 12

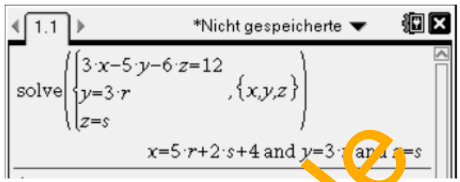
$3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 12$

Auflösen nach x_1 vermeidet die meisten Brüche: $x_1 = 4 + \frac{5}{3}x_2 + 2x_3$

Wähle $x_2 = 3r,\ r \in \mathbb{R}$

und $x_3 = s \in \mathbb{R}$

ergibt $x_1 = 4 + 5r + 2s$



Allgemeiner Lösungsvektor in Spaltenform:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4+5r+2s \\ 3r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5r \\ 3r \\ 0r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2s \\ 0s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge: $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiel 13

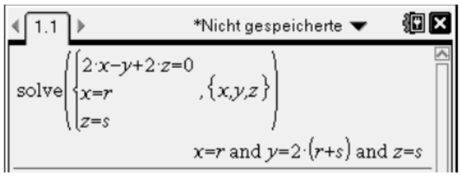
$2x - y + 2z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + 2z$

Das Absolutglied ist 0, man nennt diese Gleichung daher eine ***lineare homogene Gleichung****.*

Wähle $x = r \in \mathbb{R}$

und $z = s \in \mathbb{R}$

ergibt: $y = 2r + 2s$



Allgemeiner Lösungsvektor in Spaltenform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ 2r+2s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 2r \\ 0r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0s \\ 2s \\ s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge: $$\mathbb{L} = \left\{ r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Achtung: Weil der absolute Lösungsvektor fehlt, besteht die Lösungsmenge nur noch aus sämtlichen Linearkombinationen zweier Vektoren, man nennt diese Menge aller möglichen Linearkombinationen ihre lineare Hülle.

METHODE

Die Lösungsmenge einer Gleichung mit 3 Unbekannten erhält man so:

1. Man stellt die Gleichung nach einer Unbekannten um.
2. Dann wählt man für die anderen (rechts stehenden) Unbekannten je eine beliebige reelle Zahl r oder s bzw. ein geeignetes Vielfaches davon, wenn man damit Brüche vermeiden kann.
3. Dann schreibt man den allgemeinen Lösungsvektor an.
4. Eventuell zerlegt man ihn in eine Linearkombination (das muss nicht unbedingt sein). Dann hat die Lösungsmenge hat die Form
$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v} \mid r,s \in \mathbb{R} \right\},$$

Hinweis:

Wenn die Gleichung homogen war, also kein Absolutglied hatte, dann fehlt der Vektor $\vec{a}$ und die Lösungsmenge besteht nur noch aus allen Linearkombinationen der „Basisvektoren“ $\vec{u}$ und $\vec{v}$:
$$\mathbb{L} = \left\{ r\vec{u} + s\vec{v} \mid r,s \in \mathbb{R} \right\}$$

L heißt in dieser Form die **lineare Hülle der Vektoren** $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Dafür schreibt man auch $\mathbb{L} = \left[\vec{u}, \vec{v} \right]$.

Dies findet in der Schule wenig Verwendung.

Trainingsaufgabe 2

Löse diese Gleichungen zuerst nach x auf, bestimme dann die Lösungsmenge:

a) $x + 2y - z = 16$ b) $2x + 5y - 3z = 8$ c) $\frac{1}{2}x + 3y - z = -4$

Löse diese Gleichungen nach y auf und bestimme die Lösungsmenge:

d) $3x - y + 2z = 8$ e) $4x + 2y - 10z = 5$ f) $-x + 3y + 7z = 20$

Rechne nach eigener Wahl, schreibe den Lösungsvektor als Spaltenvektor.

g) $3x + y - 10z = 5$ h) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12$

i) $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 12$ j) $5x - z = 3$